

# Corso di Teoria dei Segnali

## a.a. 2010-2011

Esercitazioni n. 6-7 – Codici di linea, PSD e Modulazione

# CODICI DI LINEA

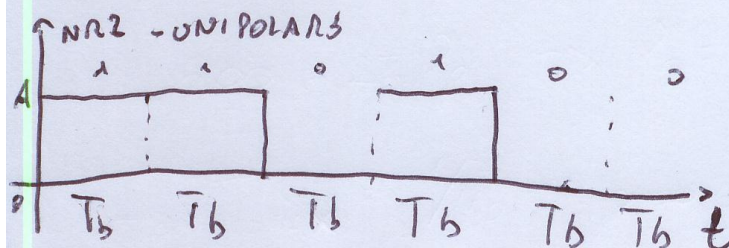
# (SEGNALE BINARIO)

UN CODICE DIGITALE PUO' ESSERE RAPPRESENTATO DA:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_s)$$

IN CUI:  $f(t)$  impulso elementare

$T_s$ : intervallo di simbolo



$$f_{uni}(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_b}\right)$$

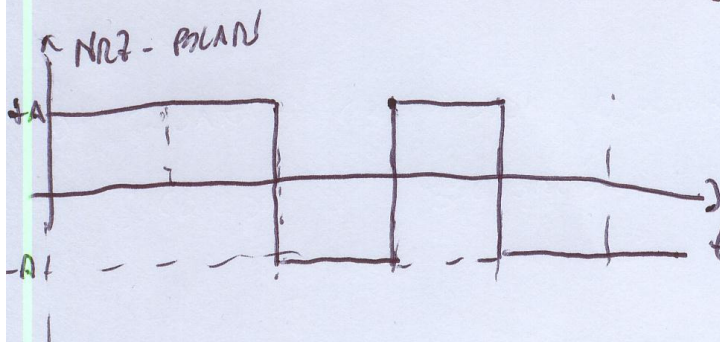
$a_n = +A, 0$

( $T_s = T_b$  per segnali binari)

$T_s = kT_b$  per segnali multilivello

il numero di bit associati ad ogni livello)

$\{a_n\}$  seq. casuale decodificata



$$f_{pol}(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_b}\right)$$

$a_n = +A, -A$

IN GENERALE

$$P_s(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(k) e^{jk\omega T_s}$$

$$F(f) = \mathcal{F}[f(t)]$$

$$R(k) = \sum_{i=1}^I (a_i a_{i+k}) P_i$$



QUINDI LA PSD DIPENDE DA  $f(t)$  E DALLA

PROPRIETÀ STATISTICHE DEI DATI

NRZ - UNIPOLARE

$$f(t) = \pi \left( \frac{t}{T_b} \right) \rightarrow F(f) = T_b \operatorname{sinc}(\pi f T_b)$$

$$R(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} A^2 & k=0 \\ \frac{1}{4} A^2 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$P_{\text{NRZ-unipol}}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \operatorname{sinc}^2(\pi f T_b) \left[ 1 + \frac{1}{T_b} \delta(f) \right]$$

$$R = m f_s = 1 f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_b} \quad \text{con} \quad \operatorname{sinc}(x) = x \quad \text{se} \quad x = \pi f T_b$$

NRZ - POLARS

$$R(k) = \begin{cases} A^2 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad P_{\text{NRZ-pol}}(f) = A^2 T_b \operatorname{sinc}^2(\pi f T_b)$$

RZ - POLARS

$$P_{\text{RZ-pol}} = \frac{A^2 T_b}{16} \operatorname{sinc}^2(\pi f T_b / 2) \left[ 1 + \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right) \right]$$

autocorrelazione delle  
seq. di dati

$P_i$  = probabilità che  
(an anti) assume  
l'i-esimo valore  
possibile



## RZ - BIPOLARS

$$P_{RZ-BIP.}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(\pi f T_b / 2) \sin^2(\pi f T_b)$$

## NRZ - MANCHESTER

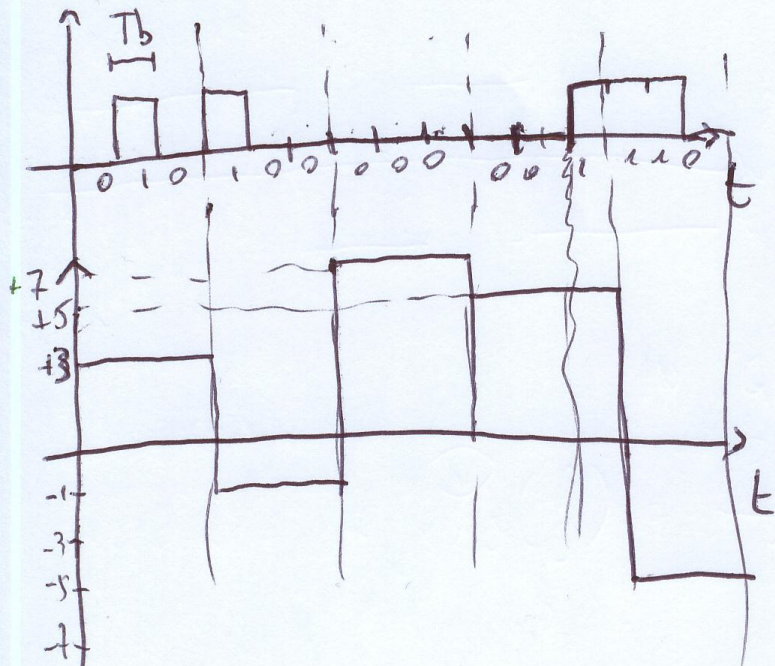
$$P_{NRZ-MAN.}(f) = A^2 T_b \text{sinc}^2(\pi f T_b / 2) \sin^2(\pi f T_b / 2)$$

## SIGNAL MULTILIVELLO

(rate R)

SIGNALS BINARIO  $\rightarrow$  NRZ MULTILIVELLO

DAC A 2-bit  $L = 2^L$  LIVELLI



DIG. IN	ANALOG. OUT
000	+7
001	+5
010	+3
011	+1
100	-1
101	-3
110	-5
111	-7

$$D = \frac{1}{e T_b} = \frac{1}{3 T_b} = \frac{R}{3}$$

IN GENERAL

$$D = R/e$$



$$P_s(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(k) e^{j\omega k T_s}$$

$$L = 2^L = 2^3 = 8$$

$$R(k) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (a_n a_{n+k})_i R_i$$

IPBTSS1  $P_i = 1/8$  (equiprobabilità)

$$R(0) = (-7)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-3)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{1}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} + 5^2 \cdot \frac{1}{8} + 7^2 \cdot \frac{1}{8} =$$

$$= \left( \frac{49}{8} + \frac{25}{8} + \frac{9}{8} + \frac{1}{8} \right) \times 2 = (6,125 + 3,125 + 1,125 + 0,125) \times 2 = 10,5 \times 2 = 21$$

$R(k) \neq 0$  per  $k=0$

$R(k) = 0$  per  $k \neq 0$  (si mantengono i segni)

$$P(f) = \frac{|R(f)|^2}{T_s} (21 + 0) \quad T_s = 3T_b \quad f(f) = \pi \left( \frac{t}{3T_b} \right)$$



$$P_s(f) = 63T_b \text{ sinc}^2(\pi f 3T_b)$$

$$B \triangleq \frac{1}{T_s} = R/3$$

$$|B \triangleq R/2|$$

EFFICIENZA SPETTRALE: NUMERO DI BIT CHE SI POSSONO TRASMETTIRE

IN UNA BANDA UNITARIA DI 1 Hz :

$$\eta = R/B$$

Tipo	B	$\eta$
UNI. NRZ	R	1
BI. NRZ	R	1
UNI. RZ	2R	1/2
BI. RZ	R	1
MANCH.	2R	1/2
ML NRZ	R/2	2



### ESEMPIO 33)

CODICE DI LINEA NRZ UNIPOLARE CONVERTITO IN MULTILIVELLO TRAMITE  
DAC  $L=32$ ; segnale ha impulsi  $\pi(t/T)$   $T=0,3472\mu s$ . CALCOLARE:

~~33~~ IL SEGNALE MULTILIVELLO:

a) VELOCITÀ ESPRESSA IN BAUD

$$D = \frac{N \text{ simboli}}{T_0 \text{ tempo}} = \frac{1 \text{ impulso rett.}}{0,3472 \times 10^{-3} \text{ s}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 1/0,3472 \times 10^{-3} = 2880 \text{ baud}$$

b) VELOCITÀ IN bit :  $L=32 \Rightarrow l=5$  in To. trasmetto 5 bit  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow R = lD = 5 \cdot 2880 = 14,4 \text{ kbps}$$

c) Banda del segnale multilivello :  $B = R/l = 2880 \text{ Hz}$

PER IL SEGNALE NRZ UNIP:

a)  $N = 5$  impulsi in  $T_0 = 0,3472 \Rightarrow D = \frac{5}{0,3472 \times 10^{-3}} = 14400 \text{ baud}$

b)  $R = D = 14400 \text{ bps}$

c)  $B = R/l = 14400/1 = 14400 \text{ Hz}$

ESEMPIO 34)

DATO UN SEGNALE A  $38400 \text{ bps}$  NRZ POLARE, VALUTARNE LA  $P_s(f)$  in dB, NORMALIZZATA IN MODO TALE CHE IL SUO MASSIMO CORRISPONDA A  $0 \text{ dB}$ .

PER LA POLARE :  $P(f) = A^2 T_b \text{ sinc}^2(\pi f T_b)$

SIL MAX È  $0 \text{ dB} \Rightarrow \text{MAX } 10 \log_{10} \text{max } P(f) = 0 \Rightarrow \text{max } P(f) = 1$

$\text{max } P(f) = A^2 T_b \Rightarrow A^2 T_b = 1 \Rightarrow A = \sqrt{1/T_b}$   $T_b = 1/38400 = 2,6 \times 10^{-5}$

$A = \sqrt{38400} = 195,96$



### ESSEMPIO 35)

UN SISTEMA DIGITALE MULTILIVELLO INVIA UNO TRA 16 POSSIBILI LIVELLI OGNI 0.8 MS; VALUTARE:

- a) NRO DI BIT ASSOCIATO AD OGNI LIVELLO:  $L=16 \Rightarrow L=2^l \Rightarrow l=\log_2 L=4$
- b) VELOCITÀ DI SEGNALE  $\Rightarrow \frac{1}{0,8 \times 10^{-3}} = 1250 \text{ simboli/s} = D = 1250 \text{ baud}$
- c) VELOCITÀ IN BIT  $\Rightarrow R = lD = 4 \cdot 1250 = 5000 \text{ bps}$

### ESSEMPIO 36)

FORMA D'ONDA ANALOGICA CODIFICATA IN PCM E POI CONVERTITA IN  
SEGNALE MULTILIVELLO PER LA TRASMISSIONE SUL CANALE. LA BANDA  
DEL SEGNALE ANALOGICO È  $B=2700 \text{ Hz}$   
(8 livelli)

a) MINIMA VELOCITÀ DI BIT DEL SEGNALE PCM :  $B = 2700$   $f_{\text{min}} = 2 \cdot 2700 = 5400 \text{ Hz}$   
NON ABBIAMO VINCOLI SUL QUANTIZZATORE, SCEGLIAMO  $M = 32 \Rightarrow m = 5$   
DA CUI :  $R = m f_s = 5 \cdot 5400 = 27000 \text{ bps}$

b) MINIMA VELOCITÀ DI SEGNALE MULTILIVELLO :  
 $R_{\text{PCM}} = 27000 \text{ bps} \Rightarrow T_b = \frac{1}{27000} \approx 3,7 \times 10^{-5} \text{ s}$

$L = 8 \Rightarrow l = 3$  QUINDI I SIMBOLI SONO COMPOSTI DA 3 BIT  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow R = l D$  MA  $D = \frac{1}{3 T_b} \Rightarrow R = 3 \cdot \frac{1}{3 T_b} = 27000 \text{ bps}$



ESEMPIO 37)

UN SEGNALE DIGITALE HA  $L = 16$  LIVELLI E IMPULSONE ~~RETTANGOLO~~ DATO DA :

$$f(t) = \pi \left( \frac{t}{T_s} \right)$$

$T_s$  = interv. di simbolo

a) DETERMINARE L'ESPRESSIONE DELLA PSD DEL SEGNALE NEL CASO DI SIMBOLI EQUIPROBABILI CON LIVELLO MASSIMO PARI A ~~15~~ 5V :

$$L = 16 \Rightarrow \ell = \frac{1}{16} \text{ bit}$$

$$P_s(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(k) e^{j k \omega T_s}$$

PER  $k=0$  SI HANNO 16 COMBINAZIONI

$$\text{E } P_i = \frac{1}{16}$$

$$R(0) = \sum_{i=1}^{16} a_{ni}^2 \cdot P_i = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} a_{ni}^2 = \frac{1}{16} [1+9+25+49+81+121+169+225+289+361+441+529+625+729+841+961]$$

$$= \frac{1}{16} [680 + 680] = 85$$

$$D_{16,2} = 16^2 = 256$$

$$R(1) = \sum_{i=1}^{256} (a_{n+1})_i \cdot P_i \quad P_i = 1/256 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(1) = \frac{1}{256} \sum_{i=1}^{256} (a_{n+1})_i =$$

$$= \frac{1}{256} \left\{ (1) [(-15) + (-13) + (-11) + (-9) + (-7) + (-5) + (-3) + (-1) + (15) + (13) + (11) + (9) + (7) + (5) + (3) + 1] + \right.$$

$$+ (-1) [(-15) + (-13) + (-11) + \dots + (15) + \dots + (-15) + \dots + (-15)]$$

$$+ \dots + (-15) + \dots + (-15) =$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow P_s(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \cdot 85$$

$$= \frac{T_s^2 \text{sinc}^2(\pi f T_s)}{T_s} \cdot 85 \Rightarrow 85 T_s \text{sinc}^2(\pi f T_s)$$



## MODULAZIONE

Si tratta di modulare una portante sinusoidale mediante un segnale (analogico o digitale) in banda base; la notazione fondamentale è:

$$s(t) = \operatorname{Re} \{ g(t) e^{j\omega_c t} \},$$

$$g(t) = x(t) + jy(t) = R(t)e^{j\phi(t)}$$

in cui  $\omega_c = 2\pi f_c$ , con  $f_c$  frequenza portante e  $g(t)$  inviluppo complesso.

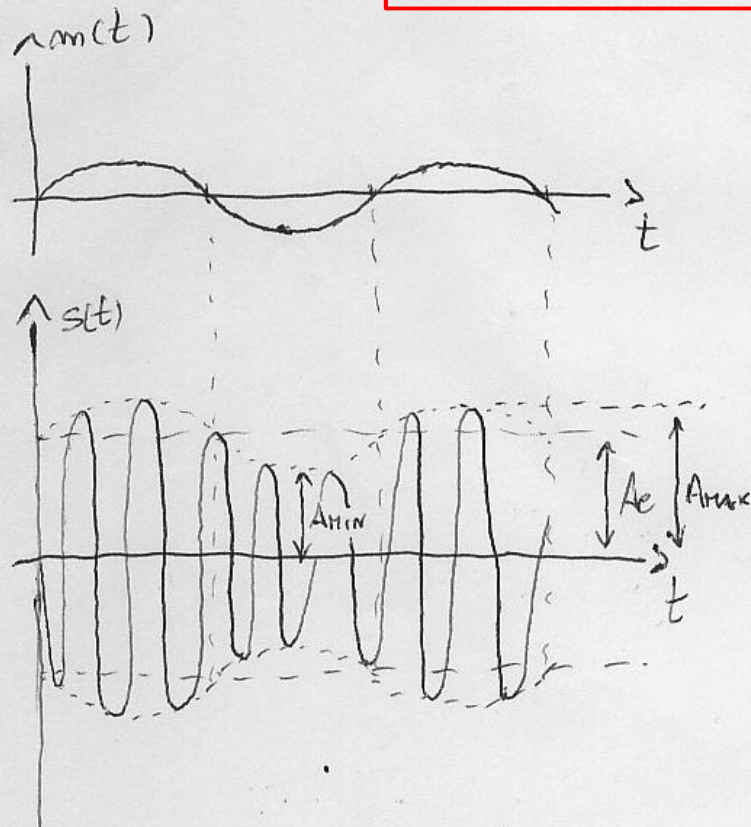
Il tipo di segnale modulato desiderato  $s(t)$  è ottenuto in base alla particolare funzione  $g[m(t)]$ , con  $m(t)$  segnale modulante in banda base.

Lo spettro d'ampiezza del segnale modulato è:

$$S(f) = \frac{1}{2} [G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)],$$

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)]$$

## MODULAZIONE D'AMPIEZZA



$$g(t) = A_c [1 + m(t)]$$

$$s(t) = A_c [1 + m(t)] \cos \omega_c t,$$

in cui  $A_c$  determina il livello di potenza.

Se  $m(t)$  ha picchi  $\pm 1$  il segnale  $m$  è modulato al 100%, altrimenti:



La potenza media normalizzata del segnale AM è:

$$\langle s^2(t) \rangle = \underbrace{\frac{1}{2} A_c^2}_{\text{POTENZA DELLA PORTANTE}} + A_c^2 \langle m(t) \rangle + \underbrace{\frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle}_{\text{POTENZA DELLE BANDE LATERALI}}$$

L'efficienza di modulazione è:

$$E = \frac{\langle m^2(t) \rangle}{1 + \langle m^2(t) \rangle} \times 100$$

La potenza di picco è:

$$P_{PEP} = \frac{A_c^2}{2} \left\{ 1 + \max[m(t)] \right\}^2$$

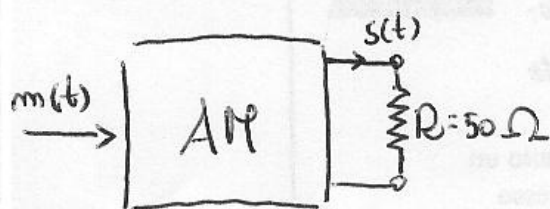
Lo spettro del segnale AM è:

$$S(f) = \frac{A_c}{2} [S(f-f_c) + M(f-f_c) + S(f+f_c) + M(f+f_c)],$$

che si vede essere una versione traslata dello spettro del segnale modulante, cui si somma una funzione  $\delta$  relativa alla componente spettrale della portante, quindi la banda del segnale modulato è doppia rispetto a quella del segnale modulante in b.b.

### ESEMPI 210)

Un trasmettitore AM è collegato con un segnale sinusoidale e un carico di  $50\Omega$ ; la portante è alla <sup>frequenza</sup> ~~portante~~ di  $850\text{ kHz}$  e la potenza di trasmissione è  $5000\text{ W}$ ; il segnale sinusoidale è alla frequenza di  $1000\text{ Hz}$  e utilizza una modulazione di  $90\%$ .



a) calcolare e scrivere l'espressione della tensione ai capi del carico:

per la modulazione AM si ha:  $s(t) = A_c [1 + m(t)] \cos \omega_c t$ ; poiché:

$f_c = 850\text{ kHz} \Rightarrow \omega_c = 2\pi \cdot 850 \cdot 1000\text{ rad/s}$ ; il valore di  $A_c$  si può calcolare considerando l'espressione della potenza (non normalizzata poiché il carico è diverso da  $1\Omega$ ) in assenza di modulazione, cioè quella dissipata sul carico per la sola portante, cioè  $P_p = \frac{1}{2} \frac{A_c^2}{R}$ , quindi:  $5000 = \frac{1}{2} \frac{A_c^2}{50} \Rightarrow \boxed{A_c = 707,107\text{ V}}$

Poiché conosciamo la forma di  $m(t)$ , ovvero  $m(t) = A \sin 2\pi \cdot f_m t$  con

$f_m = 1000\text{ Hz}$  e  $A = 0.9$  (dato che la modulazione è di  $90\%$ ), avremo:



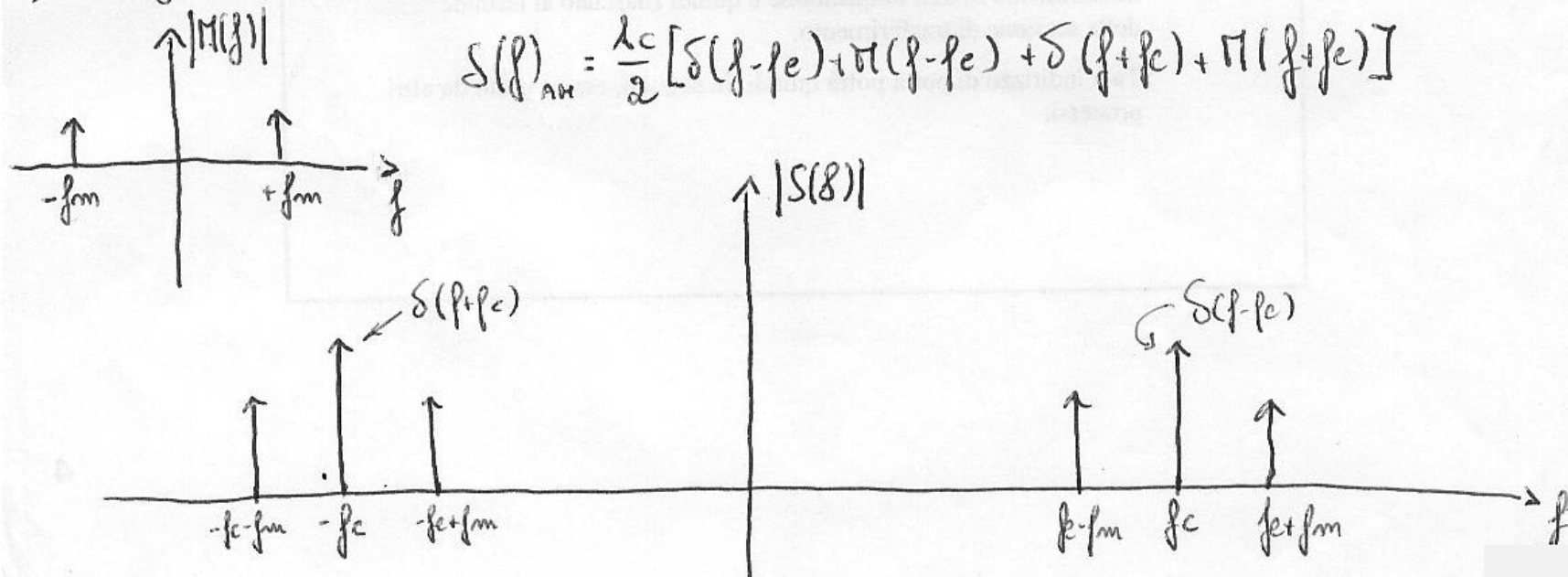
$$s(t) = 707,107 \cdot [1 + 0,9 \sin 2\pi \cdot 1000 t] \cos 2\pi 850 \cdot 1000 t$$

Senza modulazione la tensione di picco coincide con  $A_c$ , mentre con la modu-

lazione si ha  $s_{\max m}(t) = A_c [1 + 0,9] \approx 1343,5 \text{ V}$ .

b) disegnare lo spettro di  $s(t)$ : dalle teorie si ha:

$$S(f)_{\text{AM}} = \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + \pi(f - f_c) + \delta(f + f_c) + \pi(f + f_c)]$$



c) potenza media dissipata nel carico di prova:

$$P = \frac{1}{2} \frac{A_c^2}{R} + \frac{1}{2} \frac{A_c^2}{R} \cdot \langle m^2(t) \rangle$$

per cui:  $P = \frac{1}{2} \frac{A_c^2}{R} \left[ 1 + 0.9^2 \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{500000}{50} \cdot 1.405 =$

$$= 7025 \text{ W}$$

Il termine  $A_c^2 \langle m(t) \rangle$   
si trascura dato che  
 $\langle m(t) \rangle = 0$  e  $m(t)$  sinus-  
oidale

d) la potenza di picco:  $P_{PEP} = \frac{A_c^2}{2R} \cdot \left\{ 1 + \max[m(t)] \right\}^2 = \frac{500000}{2 \cdot 50} \cdot \{1 + 0.9\}^2 = 18050 \text{ W}$